MATHÉMATIQUES, INTERROGATION N° 1

Samedi 28 septembre 2024 (8h-10h)

- *L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.*
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.*
- *Le candidat laissera libre la première page de sa copie.*
- *Je m'autorise à enlever des points à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :*

souligner les justifications essentielles et *encadrer les résultats importants*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 3i - 1 = 0$.

2. Écrire $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. INDICATION : Que vaut z^2 ?

3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $\omega^n \in \mathbb{R}_+$ où $\omega := -\sqrt{3} + 3i$.

INDICATION : Écrire ω sous forme polaire.

4. ♪ Trouver tous les nombres complexes z tels que $(\overline{z} - 1)(z + 2i) \in i\mathbb{R}$.

INDICATION : Écrire z sous forme algébrique. Vous devez aboutir à une équation cartésienne de cercle.

5. ♪ Soit **E** l'équation $z^4(\overline{z} - 1) = (1 - z)\overline{z}^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ une solution de **E**. Justifier que $|z| = 1$.

b. En déduire les solutions de **E** sous formes trigonométrique et algébrique.

6. ♫ Soit u et v dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ u^n + v^n \in \mathbb{R}\right) \iff \left((u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } u = \overline{v}\right)$$

INDICATION : Si $u+v$ est réel, alors $\operatorname{Im} v = -\operatorname{Im} u$...

7. ♪ On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X &\longmapsto 2\mathbb{N} \cap X \end{aligned}$$

a. L'application ϕ est-elle injective ?

b. L'application est-elle surjective ? Déterminer son image, i.e. $\phi\langle \mathscr{P}(\mathbb{N})\rangle$.

8. ♪ Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

a. Rappeler les définitions de $f\langle A\rangle$ et $f^{-1}\langle B\rangle$.

b. Comparer $f\left\langle A \cap f^{-1}\langle B\rangle\right\rangle$ et $f\langle A\rangle \cap B$.

9. ♪ Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) := z^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a. L'application f est-elle injective ? surjective ?

b. Démontrer que $f|_\Omega$ est injective où $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\right\}$.

c. Déterminer l'ensemble $f\langle\Omega\rangle$.

10. ♪ Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des applications de E dans E. Montrer que si $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ est injective et $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ surjective, alors $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives.

11. ♫ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) := (x+y, xy)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a. L'application f est-elle injective ?

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ pour que $(u,v) \in f\left\langle\mathbb{R}^2\right\rangle$.
L'application f est-elle surjective ?

c. Soit $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par $g(x,y) := (x+y, xy)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. L'application g est-elle injective ? surjective ?

12. ♫♪ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que $f + f\circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

a. Démontrer que f est injective.

b. Démontrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

c. Déterminer la fonction f.

CORRIGÉ

1. Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = 5 - 12i = (3-2i)^2$ d'où les racines $1-i$ et $-2+i$.

2. On a $z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où $z = \pm 2e^{i\frac{\pi}{8}}$. Comme $\operatorname{Re} z > 0$ et $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on a $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega^n = (2\sqrt{3}j)^n = 2^n 3^{\frac{n}{2}} e^{\frac{2ni\pi}{3}}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\omega^n \in \mathbb{R}_+ &\iff e^{\frac{2ni\pi}{3}} = 1 \\
&\iff \frac{2n\pi}{3} = 0\,[2\pi] \\
&\iff 2n = 0\,[6] \\
&\iff n = 0\,[3]
\end{aligned}$$

4. Soit $z := x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(\overline{z}-1)(z+2i) = (x-1-iy)(x+i(y+2)) = x(x-1) + y(y+2) + i(-xy + (y+2)(x-1))$$

Ainsi $(\overline{z}-1)(z+2i) \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $x^2 - x + y^2 + 2y = 0$, i.e. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+1\right)^2 = \frac{5}{4}$. On trouve donc le cercle de centre $\omega := \frac{1}{2} - i$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. **a.** On a $|z|^4|\overline{z}-1| = |1-z||\overline{z}|^5$, i.e. $|z|^4|z-1| = |z-1||z|^5$, d'où $|z-1| = |z-1||z|$. Ainsi $z = 1$ ou $|z| = 1$, d'où $|z| = 1$.

b. On remarque que 0 est solution de **E**. Soit $z \in \mathbb{U}$. On a :

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } \mathbf{E} &\iff z^4\left(\frac{1}{z} - 1\right) = (1-z)\frac{1}{z^5} \\
&\iff \left(z^8 - 1\right)(z-1) = 0 \\
&\iff z^8 = 1
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{0 \cup \mathbb{U}_8$. Les formes trigonométriques des solutions non nulles sont $e^{\frac{ik\pi}{4}}$ pour $k \in [\![0,7]\!]$ et les formes algébriques $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$, ± 1 et $\pm i$.

6. ▷ Il est clair que $u^n + v^n$ est réel pour n dans $\mathbb{N}$ dans le cas où u et v sont réels. Supposons que $u = \overline{v}$. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $v = re^{i\theta}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u^n + v^n = r^n\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = 2r^n\cos(n\theta) \in \mathbb{R}$$

▷ Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n + v^n \in \mathbb{R}$. Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = a + ib$ et $v = a' + ib'$. On a $u + v \in \mathbb{R}$, d'où $b' = -b$. De plus,

$$u^2 + v^2 = (a+ib)^2 + (a'-ib)^2 = a^2 + a'^2 - 2b^2 + 2bi(a-a')$$

d'où $2b(a-a') = 0$ donc $b = 0$ ou $a = a'$, i.e. $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ou $u = \overline{v}$.

7. **a.** Comme $\phi(\varnothing) = \phi(\{1\}) = \varnothing$, ϕ n'est pas injective.

b. On a $\phi(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(2\mathbb{N})$. En effet, l'inclusion $\subset$ est claire et pour tout partie X de $2\mathbb{N}$, $X = \phi(X)$, d'où l'inclusion réciproque. Comme $\{1\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathscr{P}(2\mathbb{N})$, ϕ n'est pas surjective.

8. ▷ Soit $y \in f\left\langle \mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})\right\rangle$. Il existe $x \in \mathrm{A} \cap f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle$ tel que $y = f(x)$. On a donc $y \in f\langle \mathrm{A}\rangle \cap \mathrm{B}$.

▷ Soit $y \in f\langle \mathrm{A}\rangle \cap \mathrm{B}$. Il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \in \mathrm{B}$, on a également $x \in f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle$ d'où $y = f(x) \in f\left\langle \mathrm{A} \cap f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle\right\rangle$.

9. a. Comme $f(-1) = f(1)$, f n'est pas injective. Comme tout nombre complexe admet une racine carrée dans $\mathbb{C}$, f est surjective.

b. Soit $(z_1, z_2) \in \Omega^2$ tel que $f(z_1) = f(z_2)$. Comme $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$, on a $z_2 = \pm z_1$. Comme $\operatorname{Re} z_1$ et $\operatorname{Re} z_2$ sont strictement positives, on en déduit que $z_2 = z_1$. Ainsi $f|_\Omega$ est injective.

c. Montrons que $f\langle \Omega\rangle = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Soit $z \in \Omega$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. On a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $z^2 \in \mathbb{R}_-$. On aurait alors $xy = 0$. Comme $x > 0$, on aurait $y = 0$ d'où $z^2 = x^2 \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui est absurde. Réciproquement, soit $\mathrm{Z} \in \Omega \setminus \mathbb{R}_-$. On sait que Z admet deux racines carrées z et $-z$. Supposons par l'absurde que $\operatorname{Re} z = 0$. On a alors $f(z) = z^2 = -(\operatorname{Im} z)^2 \in \mathbb{R}_-$, ce qui est absurde. Ainsi, quitte à permuter $-z$ et z, on peut supposer que $z \in \Omega$ et donc $\mathrm{Z} = f(z) \in f\langle \Omega\rangle$.

10. Démontrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est clair au rang $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des applications de E dans E telles que $f_1 \circ f_2 \circ \cdot \circ f_{n+1}$ est injective sur E et $f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_1$ est surjective de E sur E. On déduit de l'injectivité de $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n+1}$ celle de f_{n+1}, et de la surjectivité de $f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_1$, celle de f_{n+1}. Ainsi f_{n+1} est bijective. On déduit que $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n+1} \circ f_{n+1}^{-1}$ est injective en tant que composée d'injections et $f_{n+1}^{-1} \circ f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_1 = f_n \circ \cdots \circ f_1$ est surjective en tant que composée de surjections. On déduit alors de l'hypothèse au rang n que $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives de E sur E. Ceci achève la démonstration de la propriété au rang $n + 1$.

11. a. Comme $f(1, 2) = f(2, 1)$, l'application f n'est pas injective.

b. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On sait qu'il existe (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $x + y = u$ et $xy = v$ *si et seulement si* u et v sont les racines du trinôme $\mathrm{X}^2 - u\mathrm{X} - v$. Comme son discriminant vaut $u^2 - 4v$, on en déduit que

$$(u, v) \in f\left\langle \mathbb{R}^2\right\rangle \iff u^2 \geqslant 4v$$

Comme $(0, 1)$ n'appartient pas à $\left\{(u, v)\,;\, u^2 \geqslant 4v\right\}$, l'application f n'est pas surjective.

c. L'application g n'est pas injective (même justification qu'au 1.). Elle est surjective comme le montre la preuve donnée au 2.

12. a. Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. On a alors $f^2(n_1) = f^2(n_2)$ et $f^3(n_1) = f^3(n_2)$ d'où $3n_1 = 3n_2$. Ainsi f est injective.

b. ▷ On a $0 = f(0) + f^2(0) + f^3(0)$. Comme $f(0)$, $f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels, on en déduit qu'ils sont tous les trois nuls. Ainsi $f(0) = 0$.

▷ On a $3 = f(1) + f^2(1) + f^3(1)$ $(\star)$. Comme $f(1) \neq f(0)$ par injectivité de f, on a $f(1) \neq 0$. Donc, par injectivité de f, $f^2(1) \neq f(0)$ ainsi $f^2(1) \neq 0$ et donc $f^3(1) \neq f(0)$ par injectivité de f. Comme $f(1)$, $f^2(1)$ et $f^3(1)$ sont dans $\mathbb{N}^*$, on déduit de $(\star)$ qu'ils sont tous les trois égaux à 1.

c. Démontrons par récurrence forte que $f(n) = n$. Le b) justifie la propriété aux rangs 0 et 1. Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Par injectivité de f et les relations $f(k) = k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, on déduit que $f(n + 1) \geqslant n + 1$. Puis $f^2(n + 1) \geqslant n + 1$ par injectivité de f puis de même $f^2(n + 1) \geqslant n + 1$. On déduit alors de

$$3n + 3 = f(n + 1) + f^2(n + 1) + f^3(n + 1)$$

que $f(n + 1) = f^2(n + 1) = f^3(n + 1) = n + 1$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.