

INTERROGATION N° 10

Lundi 19 janvier 2026 (13h – 14h)

1

Des effectifs

Dans un lycée, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente suivent les cours d'anglais et chinois, et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues.

Combien le lycée compte-t-il d'élèves ?

2

Encadrement d'un cardinal

Soit A , B et C des ensembles vérifiant $|A| = 10$, $|B| = 15$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 9$ et $|B \cap C| = 8$.

Justifier que $21 \leq |A \cup B \cup C| \leq 28$.

3

Des surjections

Justifiez qu'il y a 1022 applications surjectives de l'ensemble $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ vers l'ensemble $\llbracket 1, 2 \rrbracket$.

4

Sommes de ± 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n := \{-1, 1\}^{2n}$. Pour $x := (x_1, \dots, x_{2n}) \in E$, on note $\sigma(x) := \sum_{k=1}^{2n} x_k$.

1. Dénombrer les éléments x de E_n tels que $\sigma(x) = 0$.
2. Soit $s \in \mathbb{Z}$. Calculer le cardinal de $F_\sigma := \{x \in E_n; \sigma(x) = s\}$.

INDICATION : On pourra exprimer $\sigma(x)$ en fonction du nombre k de « 1 » figurant la liste x puis effectuer une disjonction sur s .

5

Listes d'entiers non nuls de somme n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note ϕ_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme n . Ainsi (3), (1, 2), (2, 1) et (1, 1, 1) sont les seules listes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de somme trois.

1. Calculer ϕ_k pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

2. Établir que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\phi_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \phi_k$.
3. En déduire ϕ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

6

Nombres de parties stables

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $k \mapsto k + (-1)^k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le nombre de parties X de $\llbracket 0, 2n+1 \rrbracket$ stables par f , i.e. vérifiant $f(X) \subset X$.

INDICATION : Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(2k) = 2k+1$ et $f(2k+1) = 2k$. En déduire la forme des parties stables.

7

Somme des max et des min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties non vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et

$$M := \sum_{X \in \mathcal{P}} \max X, \quad m := \sum_{X \in \mathcal{P}} \min X$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer le nombre N_k de parties X de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\max X = k$.
3. Exprimer M en fonction de $N_1, \dots, N_k$ puis en déduire M .
4. Calculer m .