

INTERROGATION N° 11

Lundi 2 février 2026 (13h – 14h)

1

Relation de Bezout et application

Déterminer une relation de Bezout entre 29 et 21 puis résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $29x + 21y = 5$.

2

Une congruence

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 10 \mid 2^{2^n} - 6$.

3

Unités

Déterminer le chiffre des unités de 7^{222} .

4

X-PC 2012 f

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $n = 36\,000\,000\,000$.

INDICATION : Utiliser la factorisation première de n .

5

Un calcul de PGCD f

Trouver le pgcd de $n! + 1$ et $(n + 1)! + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

INDICATION : Une seule itération de l'algorithme d'Euclide suffit.

6

Une divisibilité f

Soit a, b dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^n divise b^{n+1} . Montrer que a divise b .

INDICATION : Intéressez-vous aux décompositions premières de a et b .

7*Structure de groupe*

Soit E un ensemble. Donner une cns pour que $\mathcal{P}(E)$ soit un groupe muni de la loi $\cup$.

8*Similitudes de $\mathbb{C}$*

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on note $\sigma_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$. Démontrer que l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{\sigma_{a,b}; (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$$

est un groupe pour la loi de composition usuelle des applications.

9*Un corps*

Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Q}\}$ est un corps pour les opérations usuelles de $\mathbb{R}$.