

INTERROGATION N° 12

Lundi 16 février 2024 (13h – 14h)

1 ————— Une somme —————

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad F := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

2 ————— Somme de deux sev —————

Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t); x + y + z = y - z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 4)$.

1. Démontrer que F et G sont des sev de E. Déterminer leur dimension.
2. Les sev F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

3 ————— Sommes et intersections —————

Soit E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que

$$E_1 + E_3 = E_2 + E_3, \quad E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 \quad \text{et} \quad E_1 \subset E_2$$

1. Montrer que $E_1 = E_2$.
2. En déduire le corollaire suivant : si $E_1 \oplus E_3 = E_2 \oplus E_3$ et $E_1 \subset E_2$, alors $E_1 = E_2$.
3. Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas $E_1 \subset E_2$.

4 ————— Somme de deux hyperplans —————

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $E_a := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(a) = 0\}$.

1. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Établir que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, on a $E_a + E_b = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Cette somme est-elle directe ?

5

Projecteurs

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On suppose que $p \circ q = q \circ p$.

Démontrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

6

Noyaux et images

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On considère $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, E)$ tel que $v \circ u = \text{id}_E$.

Démontrer que $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

7

Trace

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $M \mapsto \text{tr}(M)A - \text{tr}(A)M$.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer $\text{Ker } \phi$. L'application ϕ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

8

Projecteurs de même image f

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev.

1. Soit f et g deux projecteurs de E .
 - a. Montrer que f et g sont deux projecteurs tels que $\text{Im } f = \text{Im } g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
 - b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.
2. Soit f et g deux projecteurs de E . On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
 - a. Montrer que $E = (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$.
 - b. Que peut-on dire de $f \circ g$?