MATHÉMATIQUES, INTERROGATION N° 2

Lundi 16 octobre 2023 (13h-14h)

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1)$. Simplifier S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICATION : On pourra calculer S_0, S_1, S_2 et S_3 afin de conjecturer une expression générale de S_n.

2. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leqslant \dfrac{4}{3}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $S_n := \sum_{k=1}^{n} kz^k$ en remarquant que $S_n = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} z^k$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $q \in \mathbb{N}$. Établir que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^q = 0$.

INDICATION : Effectuer le changement de variable $\ell := n-k$ dans la somme.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S_n := \sum_{k=0}^{3n-1} \left\lfloor \dfrac{k}{3} \right\rfloor$.

INDICATION : Calculer $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ pour $k \in [\![0,8]\!]$ et l'inspiration suivra.

6. Soit $a \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

a. Simplifier u_n. INDICATION : Mettre au même dénominateur $\dfrac{1}{(1-x)} - \dfrac{1}{(1-y)}$ pour $(x,y) \in [0,1[^2$.

b. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite.

7. Pour tous p et n dans $\mathbb{N}$, on pose $S_p(n) := \sum_{k=0}^{n} k^p$. Démontrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1}$$

INDICATION : Effectuer une intervertion dans la somme double.

8. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n\right)$$

a. Donner une forme factorisée simple de $S_1 = \cos(x_0+x_1) + \cos(x_0-x_1)$ et

$$S_2 = \cos(x_0+x_1+x_2) + \cos(x_0-x_1-x_2) + \cos(x_0+x_1-x_2) + \cos(x_0-x_1+x_2)$$

b. Conjecturer puis démontrer par récurrence une formule de factorisation de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ

1. On a directement $S_0 = 1$, $S_1 = -2$, $S_2 = 3$ et $S_3 = -4$. On conjecture que $S_n = (-1)^n(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

▷ La propriété est clairement vraie au rang 0.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $S_n = (-1)^n(n+1)$. On a

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(2n+3) = (-1)^{n+1}(2n+3-n-1) = (-1)^{n+1}(n+2)$$

d'où la formule au rang $n+1$.

COMMENTAIRE *On peut aussi passer par un télescopage :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k k - (-1)^{k+1}(k+1)\right) = (-1)^n(n+1)$$

2. ▷ On a $x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$.

▷ Comme $x(1-x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \leqslant \frac{4}{3}$$

3. Pour $z = 1$, on a $S_n = n+1$. Supposons dans la suite que $z \neq 1$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} z^k = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} z^k = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} z^k = \sum_{\ell=1}^{n} z^\ell \frac{z^{n-\ell+1}-1}{z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{\ell=1}^{n}\left(z^{n+1} - z^\ell\right)$$
$$= \frac{1}{z-1}\left(nz^{n+1} - z\frac{z^n-1}{z-1}\right)$$

4. Notons S la somme de l'énoncé. En effectuant la changement de variable $i = n-k$, on obtient :

$$S = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{n-i}^\ell = (-1)^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}^\ell = -S$$

par symétrie des coefficients binomiaux et imparité de n. Ainsi $S = 0$.

5. En regroupant les termes par paquets de trois termes consécutifs, on obtient :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\left\lfloor \frac{3i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3i+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3i+2}{3} \right\rfloor\right) = \sum_{i=0}^{n-1} 3i = \frac{3n(n-1)}{2}$$

6. Soit $a \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{\left(1-a^k\right)\left(1-a^{k+1}\right)}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après télescopage, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{\left(1-a^k\right)\left(1-a^{k+1}\right)} = \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-a^k} - \frac{1}{1-a^{k+1}}\right) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^{n+1}}\right)$$

b. Comme $a \in [0,1[$, on a $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}$.

7. Soit p et n dans $\mathbb{N}$. Par la formule du binôme puis télescopage :

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} \mathrm{S}_i(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{k=0}^{n} k^i = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} k^i = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right) = (n+1)^{p+1}$$

8. **a.** On a $\mathrm{S}_1 = 2\cos x_0 \cos x_1$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_2 &= \cos(x_0 + x_1 + x_2) + \cos(x_0 - x_1 - x_2) + \cos(x_0 + x_1 - x_2) + \cos(x_0 - x_1 + x_2)\\ &= 2\cos x_0 \left(\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2)\right) = 4\cos x_0 \cos x_1 \cos x_2\end{aligned}$$

b. Démontrons par récurrence sur n que $\mathrm{S}_n = 2^n \cos x_0 \cdots \cos x_n$. La question précédente démontre l'initialisation de cette relation. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{n+1} &= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n + \varepsilon_{n+1} x_{n+1}\right)\\ &= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n}} \left(\cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n + x_{n+1}\right) + \cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n - x_{n+1}\right)\right)\\ &= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n}} 2\cos x_{n+1} \cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n\right) = 2\cos x_{n+1} \mathrm{S}_n = 2^{n+1} \cos x_0 \cdots \cos x_{n+1}\end{aligned}$$

d'où la formule au rang $n+1$.