

INTERROGATION N° 8

Lundi 5 janvier 2026 (13h – 14h)

1 Moyennes arithmétiques et harmoniques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_n$ des réels strictement positifs. En utilisant la convexité, établir que

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) \geq \frac{n}{u_1 + \dots + u_n}$$

2 Un encadrement

Soit a et b vérifiant $0 < a < b < 1$. Démontrer que

$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} \leq \arcsin b - \arcsin a \leq \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$$

3 Trigonométrie réciproque

Démontrer que $\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}$.

4 Une simplification f

Démontrer de deux façons différentes que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(\sinh x) + \operatorname{Arccos}(\tanh x) = \frac{\pi}{2}$.

5 Autour des fonctions de Gudermann f

On note $\operatorname{Argsinh}$ la bijection réciproque de $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi(x) := \operatorname{Argsinh}(\tan x)$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1. Justifier que $\operatorname{Argsinh}$ est bien définie et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. Montrer que ϕ réalise une bijection dérivable de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \phi'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

3. Montrer que la fonction $G_d := 2\phi^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G_d'' + \sin \circ G_d = 0$.

6

Une équation *ff*

Résoudre l'équation $\text{Arcsin } x = \frac{\pi}{3} + \text{Arcsin}(2x)$.

7

Une inégalité géométrique *ff*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Démontrer que $\sin(a) \sin(b) \sin(c) \leq \frac{1}{8}$.