

INTERROGATION N° 9

Lundi 12 janvier 2024 (13h – 14h)

1

Produit matriciel

Déterminer deux matrices carrées A et B non nulles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que :

1. $AB = BA = 0$;
2. $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

2

Un système à paramètres

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et le système

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $\mathcal{S}$ admette : une solution unique, une infinité de solutions puis aucune solution.
2. Résoudre $\mathcal{S}$ lorsque $(a, b) = (2, 2)$.

3

Inverses et puissances

Soit $M := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$ et en déduire que M est inversible et calculer M^{-1} .
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$. On procèdera par récurrence en la relation entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n) .
3. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
4. On pose $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
5. On note $B = P^{-1}AP$. Calculer B^n pour tout n et en déduire une expression de A^n , puis de u_n , v_n et M^n .

INDICATION : Remarquer que $B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP \dots$

4*Nilpotence*

Soit A, B des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Montrer que $A + B$ et AB sont nilpotentes.

5*Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

1. Montrer que $\text{tr}(A^2) \geq 0$.
2. En utilisant la fonction $P : \lambda \mapsto \text{tr}(A + \lambda B)^2$, démontrer que $|\text{tr}(AB)| \leq \sqrt{\text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2)}$.